保角超代數

程舜仁
國立成功大學數學系副教授

在量子場理論中一個重要的組成因素是量子場的觀點；在此我們可以將場(field)視爲在 d- 維 Minkowski 空間之算子値分布(operator-valued distributions)，而這裡的算子是作用在 V 的空間(space of states)上，我們通常可將 V 當成一個無窮維的 Hilbert 空間。當維度 d=2 時，我們可以選用光錐面座標(light-cone coordinates)和考慮（右）chiral 場，利用它們可以求出在實數線上的算子値分布，經過緊緻化實數線成一圓後，我們可以用形式傅里葉級數展開 chiral 場，而在經歷複數化後，我們可以得到下列形式冪級數(formal power series)

$$a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{[n]} z^{-n-1},$$

上式中 $a_{[n]} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$。經由愛因斯坦的相對論，在其他場之中，我們知道這些場滿足 locality 公設(locality axiom)，也就是說若場的非零點(support)被光錐面分離，則場彼此間不互相作用。當在二維時， chiral 場 $a(z)$和 $b(z)$表示

$$[a(z), b(w)]=0,\ z\neq w, \qquad (0{:}1)$$

値得注意的是，由全部場的係數可生成（超）李代數(Lie (super)algebra)，使得上面的括號運算(bracket)即相當於係數間的括號運算。爲了瞭解場之間的交互作用(operator product expansion OPE)，利用在 OPE 得到的一些性質，我們可以設公理(axioms)，然後架構一套理論[1][2][8][12]，這也就引導出了（超）保角代數的觀點。從論文[12]後，我們就稱之爲形式分布的（超）李代數(formal distribution Lie (su-per) algebras)。

現在可由上式(0:1)，$[a(z),b(w)]$表示是一個集中於一點的分布，因此經由分布理論，對一些分布$(a_{(j)}b)(w)$，我們有下列結果：

$$\left[a(z), b(w)\right] = \sum_{j=0}^{N} (a_{(j)}b)(w)\partial_w^{(j)}\delta(z-w), \qquad (0{:}2)$$

在這裡的 $\delta(z\text{-}w)$就是 delta 函數而且$\partial_w^{(j)}$即爲 $\frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial w^j}$ 。

利用形式 delta 函數(formal delta function)$\delta(z-w) = z^{-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\frac{z}{w})^n$去替代 delta 函數後，我們現在就可以定義形式分布李代數的觀點。它是由一個超李代數$\mathbf{g}$再加上一個場集合 $\mathbf{F}$，也就是說在$\mathbf{g}$上的形式冪級數之係數能使得佈於 $\mathbb{C}$ 上 $\mathbf{F}$ 的場之係數張成(span)$\mathbf{g}$ 且這些場是相互 local(mutually local) (0:2)。

以(centerless)*Virasoro* 代數爲例，它是由李代數 Vir 結合一組基底 L_n $(n\in\mathbb{Z})$及有下列的關係

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n},$$

它可由 *local* 形式分布 $L(z)= \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$利用

$$[L(z), L(w)]=\partial_w L(w)\delta(z-w)+2L(w)\partial_w\delta(z-w)$$

而張成。

另一個是以 current 代數$\tilde{\mathbf{g}}$的例子：當 $\mathbf{g}$ 是有限維李代數，也就是$\tilde{\mathbf{g}}=\mathbf{g}\otimes\mathbb{C}[t, t^{-1}]$，它的運算方式如下

$$[a\otimes t^n, b\otimes t^m]= [a, b]\otimes t^{n+m},\ n, m\in\mathbb{Z};\ a, b\in\mathbf{g}.$$

因爲有下列性質

$$[a(z), b(w)] = [a, b]\delta(z-w),$$

所以$\tilde{\mathbf{g}}$加上$a(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a\otimes t^n z^{-n-1}(a\in\mathbf{g})$的場後，是一個形式分布的李代數。

假定$(\mathbf{g},\ \mathbf{F})$是一個形式分布的超李代數(formal distribution Lie superalgebra)，爲了對下列情況是封閉的，我們常會將$\mathbf{F}$擴張爲一個較大的場集合(collection of fields) $\bar{\mathbf{F}}$，一爲在$\partial=\partial_z$下封閉，還有在$\bar{\mathbf{F}}$中對任意$a(z)$, $b(z)$和，$j\in\mathbb{Z}_+$，乘積(products)$(a_{(j)}b)(z)$是封閉的，（由Dong's lemma，我們知道它們依然會相互local），因此$\bar{\mathbf{F}}$變成一個擁有對任意$j\in\mathbb{Z}_+$， $\mathbb{C}$-雙線性乘積的$\mathbb{C}[\partial]$-模。這也就導引出保角（超）代數的觀點。

保角超代數是一個對任意$n\in\mathbb{Z}_+$均有$\mathbb{C}$-雙線性乘積$a_{(n)}b$的左($\mathbb{Z}_2$-graded)$\mathbb{C}[\partial]$-模R，使得對於任意($a,b,c\in$ R; m, $n\in\mathbb{Z}_+$且$\partial^{(j)}=\frac{1}{j!}\partial^j$，我們有下列公理：

(C0) $a_{(n)}b=0$, for $n>>0$,

(C1) $(\partial a)_{(n)}b=-na_{(n-1)}b$,

(C2) $a_{(n)}b=(-1)^{p(a)p(b)}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+n+1}\partial^{(j)}(b_{(n+j)}a)$,

(C3) $a_{(m)}(b_{(n)}c)=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{m}{j}(a_{(j)}b)_{(m+n-j)}c$

$$+(-1)^{p(a)p(b)}b_{(n)}(a_{(m)}c).$$

所以保角（超）代數相較於以上二種形式分布的（超）李代數，分別是有非零乘積$L_{(1)}L=2L$和$L_{(0)}L=\partial L$的*Virasoro*保角代數$\mathbb{C}[\partial]\otimes L$及對於任意$a$, $b\in\mathbf{g}$有非零乘積$a_{(0)}b=[a, b]$的current保角代數$\mathbb{C}[\partial]\otimes\mathbf{g}$。

形式分布的李代數與保角超代數幾乎是等價的，正如以上所見，我們可以對形式分布保角超李代數結合一個保角代數；反之，在一些適當的條件下，其逆敘述亦會爲眞。

回歸至最基本的問題就是將有限（此處的有限是針對佈於$\mathbb{C}[\partial]$下的模而言）單子保角超代數予以分類，面對於此問題，最好的方法就是先去討論保角代數的表現理論，自然地我們會以佈於保角代數之下列模類做考慮，亦即像帶有一個對任意正整數n，從R到$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}M$的（左）$\mathbb{Z}_2$-graded$\mathbb{C}[\partial]$-模，經由$a\rightarrow a^M_{(n)}$的$\mathbb{C}$-線性函數($\mathbb{C}$-linear map)，使得下列性質對$a$, $b\in$ R和$m,n\in\mathbb{Z}_+$均成立：

(M0) $a^M_{(n)}\upsilon=0$, for $\upsilon\in M$ *and* $n>>0$,

(M1) $\left[a^M_{(m)}, b^M_{(n)}\right]=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(a_{(j)}b)^M_{(m+n-j)}$,

(M2) $(\partial a)^M_{(n)}=[\partial, a^M_{(n)}]=-na^M_{(n-1)}$.

閱讀至此，或許讀者會注意到佈於保角超代數定義下的模之表現，如同於擁有相似之伴隨表示(adjoint representation)運作的形式分布超李代數之模類；那也就是說，我們也有一個像算子乘積展開式(OPE)的算子，像這樣的模我們稱爲保角模(conformal modules)[4]。現在當我們將問題的焦點轉至有限保角代數的分類。這個問題的解答也就如下，一個有限單子代數不是一個Virasoro保角代數就是一個伴隨有限維單子李代數的current保角代數[7]，這分類主要是由兩個結果而來，亦即佈於Virasoro與current保角代數的單子保角模之分類[4]和在Cartan線性緊緻李代數(linearly compact Lie algebras)的分類，也相當於在有限維流形之單子無窮維僞群(pseudogroups)的分類[9][10]。

現在我們來討論保角超代數的情況，若相較於討論形式分布保角超李代數，這會顯得容易些。給定t爲偶(even)變數且$\xi_1,\cdots$，ξ_n爲n個奇(odd)變數。在$\Lambda(n)$爲有n(anticommuting)變數之Grassmann超代數的情況下，定Λ

$(1,n)=\mathbb{C}[t,\ t^{-1}]\otimes\Lambda(n)$且 $W(1,n)$爲 $\Lambda(1,n)$的求導超代數，這個自由散度向量場的子代數定爲 $S(1,n)$，假定$\alpha = dt - \sum_{i=1}^{n} \xi_i d\xi_i$是標準的切觸形式(contact form)，則 $K(1,n)$爲 $W(1,n)$基於作用 $\Lambda(1,n)$之元素而保留 α 的子代數，在論文[11]架構了 $W(1,n)$，$[S(1,n),\ S(1,n)]$和 $K(1,n)$，再加上結合了有限維單子李超代數的 current 代數後，爲有限維單子保角超代數的完整目錄。在[3]我們建構一個新的限維單子保角超代。這個保角超代數是一個 $K(1,6)$的子代數，而且它的偶部份包括一個 *Virasoro* 代數和一個 so(6)-current ，它的奇部份包括六個 conformal weight$\frac{3}{2}$和十個 conformal weight$\frac{1}{2}$的 primary 場。這會轉爲另一個例子，很自然地會在場的保角重量(conformal weights)上設限制，Kac證明了這個新例子在結合以上滿足限制的目錄後，都是有限維保角超代數[14]。因爲缺乏與 Cartan 無窮維線性緊緻超李代數的類似分類，所以需要加上上述的限制。

爲了得到一個類似 Cartan 在超代數的結果，自西元 1997 我們開始有系統地一步一步移去一些限制條件，最近我們終於對無窮維單子線性緊緻超李代數作了分類，而這些結果一一發表於一系列論文[5]、[6]與[13]，對於能夠獲得這樣的結果我們感到非常興奮，而且我們在未來的研究中，會對於這些結果好好加以運用。

回憶 Cartan 的分類，每一個單子線性緊緻李代數可分爲下列四類李代數的完備化(the completion)（在拓撲學中，經由選定的基本子代數之過濾(filtration)結構而生成，如可參考[9]得到嚴謹的定義）：第一類爲在 $\mathbb{C}^n$ 之全部多項式向量場的李代數 $W(n)$；第二類爲 $S(n)\subseteq W(n)$是發散自由向量場的子代數；第三類爲 $H(2n)\subseteq W(2n)$是 Hamiltonian 向量場的子代數；第四類爲 $K(2n)\subseteq W(2n+1)$是切觸向量場(contact vector fields)的子代數。這些系列有基本的幾何見解， $W(n)$相對於全部的轉換(transformations)， $S(n)$相對於保持轉換之容積子群， $H(2n)$爲在 $\mathbb{C}^{2n}$ 保持標準辛形式(symplectic form)的轉換，而 $K(2n+1)$基於作用一函數保持切觸形式的轉換子群，結合以上這些系列後，它們的幾何個體分別是微分流形、可定向流形、辛流形與 *CR* 流形(differential, orientable, symplectic and CR manifolds)，値得注意的是在李代數的情況下，沒有特別的例外(exceptions)，但是在超級流形(supermanifolds)的情況下，去回答這問題就變得不同，類似在非超級的情形下，還是有一些序列(series)，如同在非超級的情形，每一種情況都有一個幾何解釋，但在一些特定的超維度(superdimensions)，還是有五種不屬於任何序列的例外代數(exceptional algebras)產生，（這些例外必須與例外的單子李代數(the exceptional simple Lie algebras)G_2, F_4, E_6, E_7 和 E_8 相比較），其中的一個例外已被 Sergeev 知道，而另外三個也被 Shchepochkina[15]發現，當我們在研究超保角代數時亦發現一個[3]，而最後一個在當我們從事線性緊緻超李代數的研究中被發現[6]。作者非常感謝陳東賢先生在本報告譯爲中文時，所提供的協助。

參考文獻

1. Ademollo, M. et al: Supersymmetric strings and colour confinement, *Phys. Lett*. B62 (1976), 105-110.
2. Borcherds, R.: Vertex algebras, Kac-Moody

algebras, and the Monster, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 83 (1986), 3068-3071.

3. Cheng, S.-J.; Kac, V. G.: A New n=6 superconformal algebras, *Comm. Math. Phys.* 186 (1997) 219-231.

4. Cheng, S.-J.; Kac, V. G.: Conformal Modules, *Asian J. Math.* 1 (1997) 181-193. Erratum: Conformal Modules, *Asian J. Math.* 2 (1998) 153-156.

5. Cheng, S.-J.; Kac, V. G.: Generalized Spencer cohomology and filtered deformation of $\mathbb{Z}$-graded Lie superalgebras, *Adv. Theor. Math. Phys.* 2 (1998) 1139-1180.

6. Cheng, S.-J.; Kac, V. G.: Structure of $\mathbb{Z}$-graded Lie superalgebras of vectorfields, *Transformation Groups*, 4, No. 2-3 (1999) 219-272.

7. D'Andrea, A.; Kac, V. G.: Structure theory of finite conformal algebras, *Selecta Math. New Ser.* 4 (1998) 377-418.

8. Frenkel, I. B.; Lepowsky, J; Meurmann, A.: Vertex operator algebras and the Monster, Academic Press, New York, 1988.

9. Guillemin, V. W.: A Jordan-H ölder decomposition for a certain class of infinite-dimensional Lie algebras, *J. Diff.* Geom. 2 (1969) 313-345.

10. Guillemin, V. W.: Infinite-dimensional primitive Lie algebras, *J. Diff. Geom.* 4 (1970) 257--282.

11. Kac, V. G.; van de Leur, J.: On Classification of superconformal algebras, In: S. J. Gates et al. (eds), Strings 88, World Scientific (1989) 77-106.

12. Kac, V. G.: Vertex algebras for beginners, University lecture notes vol. 10, AMS, Providence, 1996.

13. Kac, V. G.: Classification of infinite-dimensional simple linearly compact Lie superalgebras, *Adv. Math.* 139 (1998) 1-55.

14. Kac, V. G.: Superconformal algebras and transitive group actions on quadrics, *Comm. Math. Phys.* 186 (1997) 233-252.

15. Shchepochkina, I.: The five exceptional simple Lie superalgebras of vector fields, hep-th/9702121 (1997).

程舜仁

學經歷：

美國西北大學學士、碩士(1988)

美國哈佛大學碩士、博士(1993)

Max-Planck Institute für Mathematik (1993-1994)

國立成功大學數學系副教授(1994- 迄今)

美國麻省理工學院數學系訪問學者(1997-1998)

實驗尋找 Higgs 粒子的現狀與展望

張元翰　國立中央大學物理系副教授

侯書雲　國立中央大學物理系副研究員

粒子物理領域研究物質的最基本結構(即所謂基本粒子)和作用力，在這個領域，有一