

本院 1999 年年輕學者研究著作獎得獎人 研究成果簡介

計算機演算法中一類常見之各個擊破遞迴式的分析

王炳豐

國立清華大學資訊工程系副教授

一個計算機演算法(algorithm)的好壞，通常須由準確的時間複雜度分析(time complexity analysis)來決定。各個擊破(divide-and-conquer, D&C)是計算機科學中最重要的演算法設計策略(algorithm design strategy)之一。這個策略建議我們在解決一個大小為 n 的問題時，先將它拆成兩個大小分別為 $\lfloor n/2 \rfloor$ 與 $\lceil n/2 \rceil$ 的小問題，分別解決兩個小問題後，再合併兩個小問題的解答去得到原問題的答案。在分析一個 D&C algorithm 的時間複雜度時，一般我們需要計算下列遞迴式：

$$E(n) = E(\lfloor n/2 \rfloor) + E(\lceil n/2 \rceil) + f(\lfloor n/2 \rfloor),$$

其中 f 可以是任意一個非遞減的函數(nondecreasing function)。當 f 給定後，有好幾種方法可以用來計算 $E(n)$ ，並不困難。例如著名的 substitution method、iteration method、以及 master method^[2]都可以用來準確的分析 $E(n)$ 。

可惜並非所有 D&C algorithms 的時間複雜度都可以被表示成 $E(n)$ 的型式。有一類 D&C algorithm 在分析其時間複雜度時，需要計算下列遞迴式：

$$M(n) = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ M(i) + M(n-i) + \min \{ f(i), f(n-i) \} \right\}$$

其中 f 可以是任意一個非遞減的函數。這個遞迴式在利用 divide-and-conquer 解決圖形(graph)與幾何(geometry)上的問題時經常會被碰到。其中一個例子是發生在計算著名的 quick sort 在執行過程中，資料交換(exchange)可能發生的最大次數，在這個例子中， $f(x) = x$ 。

我在 1993 年第一次開授計算幾何(computational geometry)這門課時，發現好幾個重要的演算法在分析時都會碰到 $M(n)$ 這個遞迴式，不過課本上僅表示分析太過複雜而略去說明，直接引用其它論文中的結果，這使得我對這個遞迴式的分析產生濃厚的興趣。經過我進一步閱讀相關文獻後才知道這個遞迴式的分析十分的困難。如何計算 $M(n)$ 在演算法設計與分析(design and analysis of algorithms)這個領域上，從 1970 年代起就受到非常廣泛的重視與討論。此外，我很意外的發現，過去文獻中所提出的計算方法，在很多情形下， $M(n)$ 無法被非常準確的估算。因此我為自己訂定了一個研究目標：為 $M(n)$ 找到一個在任何情況下都可以準確估算的方法。

在[4]中，我提出了一些新方法去評估 $M(n)$ 。我的方法非常準確，而且相當簡單。在任何情況下，我的估算結果最多是真正解的兩倍。這些新方法大幅度的改進了 Li and Reingold^[3]在 *SIAM Journal on Computing* 上所發表的結果。此外，我更進一步證明了一個

非常有趣的結論：

$$M(n) \leq 2E(n)$$

過去一般人都直覺認為以 $E(n)$ 為時間複雜度的 D&C algorithms 較以 $M(n)$ 為時間複雜度的 D&C algorithms 要有效率許多，我的結果顯示兩個方法幾乎一樣好，推翻了這個直覺。而且，這個結果也意味著困難的 $M(n)$ 估算，可以非常簡單的完成如下：先藉由 $E(n)$ 現有的計算方法（如前述的 substitution method、iteration method、以及 master method）計算出 $E(n)$ ，然後再計算 $2E(n)$ 作為 $M(n)$ 的估計值。這個估算法不但簡單，而且相當準確，最多是 $M(n)$ 真正解的兩倍^[4]。

Journal of Algorithms 的論文評審大多是相關領域的著名學者。由於 $M(n)$ 的計算在演算法設計與分析上是一個非常基本且重要的問題，有一個論文評審給我的這篇論文非常高的評價，他認為我的結果「solidifying the foundations of the field」。這一篇論文我前後作了一年半，是我目前為止在研究上最得意的一個結果，我希望未來能被相關教科書所引用。

通常一個各個擊破演算法是將一個大問題拆成兩個小問題，但有些各個擊破演算法會將一個大問題拆成兩個以上的小問題，我們將這一類演算法稱為多維各個擊破演算法(multi-dimensional D&C algorithm)。最近 Alonso ^[1] 等人在 *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 上提出了一些方法去評估多維各個擊破演算法在分析時所會遭遇到的兩個遞迴式 $A(n)$ 與 $B(n)$ ，這兩個遞迴式的定義如下。

$$A(n) = \max_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_p=n \\ 1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_p}} \left\{ \sum_{i=1}^p A(n_i) + f(n_1) \right\}$$

$$B(n) = \max_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_p=n \\ 1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_p}} \left\{ \sum_{i=1}^p B(n_i) + \sum_{i=1}^{p-1} f(n_i) \right\}$$

其中 $p \geq 2$ 是一個任意整數， f 是任意一個非遞減的函數。 $A(n)$ 和 $B(n)$ 都是 $M(n)$ 的擴充式 (generalization)：當 $p=2$ 時 $A(n)=B(n)=M(n)$ 。在[5]中，我將[4]中的方法加以推廣去分析這兩個遞迴式，我的推廣為 $A(n)$ 與 $B(n)$ 提出了非常準確的上下限(upper bound and lower bound)，大幅度的改進了 Alonso 等人過去所發表的結果。

在過去，當一個演算法的時間複雜度為 $M(n)$ 、 $A(n)$ 、或 $B(n)$ 時，演算法的設計者很可能要花費很多時間，才能分析出所設計之演算法的好壞，甚至不知道要如何分析。利用我在[4, 5]中的結果，這個分析會變的非常簡單。

參考書目

1. L. Alonso, E. M. Reingold, and R. Schott, "Multidimensional divide-and-conquer maximin recurrences," *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, vol. 8, no. 3, pp. 428-447, 1995.
2. T. H. Cormen, C. E. Leiserson, and R. L. Rivest, *Introduction to Algorithms*, MIT Press, Cambridge, MA, 1990.
3. Z. Li and E. M. Reingold, "Solution of a divide-and-conquer maximin recurrences," *SIAM Journal on Computing*, vol. 18, no. 6, pp. 1188-1200, 1989.
4. B.-F. Wang, "Tighter bounds on the solution of a divide-and-conquer maximin recurrence," *Journal of Algorithms*, vol. 23, pp. 329-344, 1997.

5.B.-F. Wang, "Tight bounds on the solutions of multidimensional divide-and-conquer maximum recurrences," *Theoretical Computer Science*, accepted.



王炳豐

學經歷：

國立交通大學資訊科學系學士(1988)

國立臺灣大學資訊工

程研究所博士(1991)

國立清華大學資訊工程學系副教授(1993- 迄今)、計算機中心系統組組長(1998- 迄今)

有機化學反應的開發與應用

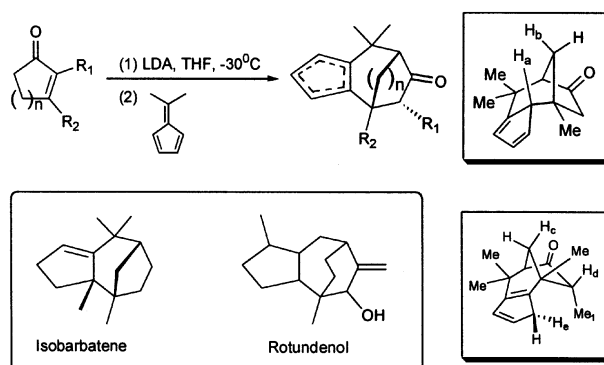
洪伯誠

國立中正大學化學所副教授

烯醇離子對富烯的 Double-Michael 反應

合成 hydrozalenic sesquiterpenes 的研究一直是很熱門的課題，我們發現利用 lithium dienolate 對富烯化合物經由 sequential "Double-Michael" 加成反應，可以很快速的建構合成出 tricyclic[5.3.0.n^{2.5}]alkane 的結構，這也是天然物 isobarbatene 和 rotundenol 的基本骨架結構（圖一）。

典型的方法是將 fuluene 的 THF 溶液緩慢滴加入置於 -78°C 的 methylcyclopentenone 和 LDA 的 THF 溶液中。在所測試的 8 個例子中(n=1,2,3)，產率約在 40-96%。這個反應



圖一

是富烯類化合物中一類創新的反應，而且可以很有效率的在一步反應中合成出具有如此複雜的天然物骨架。

富烯的[6+3]環化加成反應

環化加成反應一直是有機化學中很重要的反應，因此近幾年來尋求各種新的環化加成反應便是很重要的課題之一。fused[5,6]indan 的結構更是許多天然有機化合物所具有的結構，藉由逆合成分析的法則，我們發現似乎可以利用一種新的反應，稱之為[6+3]環化反應在富烯類化合物上，用來作為合成 fused[5,6]indan 的方法。經過多次的實驗結果，發現 2-oxyallyl cation 可以和電子密度高的富烯類化合物，進行[6+3]環化反應而在一步反應之內建構合成出 fused[5,6]indan 化合物。其產物並經由一系列的 2D NMR 確認其結構，而且應用此反應在一些 indene 化合物的合成上。此外，其他不同富烯的反應性和可能的反應機構並加以探討。（圖二）

Rosiridol 的合成研究

在合成天然物 xestovanin 的過程中，我們需要一種天然物 rosiridol，雖然 rosiridol 的結構曾被報導過，但是其絕對組態和全合成一直