姓名：楊一帆

學歷：

Ph.D., University of Illinois at Urbana-Champaign, USA.

現職及經歷：

國立交通大學應用數學系助理教授及副教授（2003/8- 迄今）

Research fellow, National University of Singapore, (2001/7-2003/6)

Postdoctoral member, Institute for Advanced Study, (2000/9-2001/6)

著作名稱：

1. Yifan Yang, *transformation formulas for generalized Dedekind eta functions*, Bulletin of the London Mathematical Society 36 (2004), 671-682.

2. Kok Seng Chua, Mong Lung Lang, and Yifan Yang, *on the Rademacher conjecture: congruence subgroups of genus zero of the modular group*, Journal of Algebra 277 (2004), 408-428.

3. Yifan Yang, *defining equations of modular curves*, Advances in Mathematics. 204 (2006), 481-508.

中文簡介：

Modular forms 及 modular functions 理論在現代數論(number theory)中扮演著極其重要的角色，並在數學與數學物理(mathematical physics)中許多領域多有關聯。簡單地說，一個定義於複數平面的上半平面的函數 $f(z)$被稱做為一個modular form of weight

k如果對於所有滿足$ad-bc=1$的整數a,b,c,d它都滿足

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=(cz+d)^k f(z)\ 。$$

若一個 modular form 的 weight 為 0 ，我們便把它稱做為一個 modular function 。當$a=1, b=1, c=0, d=1$，上式成為$f(z+1)=f(z)$。因此，modular forms和modular functions皆為periodic functions。事實上，就某種角度而言，我們可以把 modular forms and functions 想做是 periodic functions 的 2-dimensional analogue 。

為什麼modular forms在數論裡非常重要的一個主要原因是它們的 Fourier coefficients 常含有豐富而有趣的算術(arithmetic)內涵。比如說 Jacboi theta function

$$\theta(z)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{2\pi in^2z}$$

是一個 modular form of weight 1/2 ，而$\theta(z)^k$的第n個Fourier coefficient代表著將一個整數n寫成k個平方數的和的方法個數。Modular form理論中一個含有非常深刻算術內涵的例子出現在 Andrew Wiles所給的Fermat's Last Theorem的証明中。

十七世紀數學家Pierre de Fermat 於西元 1637 年在他所擁有的 Claude-Gaspar Bachet所翻譯的*Arithmetica of Diophantus*書中寫下一段話，宣稱他有一個非常神奇的論證去證明當$n\geq3$時，方程式

$$x^n+y^n=z^n$$

沒有整數解使得x, y, z皆非零。但是終其一生Fermat僅發表了$n=4$時的證明，而沒有給出一般情況的証明。這問題吸引了許多傑出的數學家的注意，但是沒有人能夠找到一個完整而正確的証明。一直到西元1994年才由Wiles給出一個正確的証明。(證明出現在1995年的*Annals of Mathematics*中，其中有部分為 Richard Taylor 的貢獻。)

事實上Wiles給的並不是Fermat's Last Theorem 的一個直接證明。他所證明的是所謂的 Taniyama-Shimura conjecture（谷山-志村猜想）。這個猜想的內容宣稱所有係數為有理數的 elliptic curve（橢圓曲線）$E: y^2=x^3+ax+b$ 都對應到一個 modular form of weight 2其Fourier coefficients藏有這個elliptic curve的算術性質。在西元1986年Ken Ribet 證明若p是一個質數而A, B, C為正整數使得$A^p+B^p=C^p$成立(換句話說，它們為一個Fermat's Last Theorem的反例)，則不存在一個modular form of weight 2對應到elliptic curve $y^2=x(x-A^p)(x-B^p)$。(換句話說，其為一個 Taniyama-Shimura conjecture 的反例。）然後 Wiles 便證明了 Taniyama-Shimura conjecture 沒有反例，所以Fermat's Last Theorem也不會有反例。（事實上， Wiles 只證明了在一些特殊情況下Taniyama-Shimura conjecture沒有反例，但這些特殊情況包含了上面提到的 elliptic curve 。）

Taniyama-Shimura conjecture現在已

有Breuil，Conrad，Diamond，及Taylor給出完整的証明，但是還有許多有關elliptic curves及modular forms的問題尚待解決。比如說，Taniyama-Shimura conjecture的另一個描述為對所有係數為有理數的elliptic curve $y^2=x^3+ax+b$都存在兩個modular functions x及y使得這兩個modular functions滿足$y^2=x^3+ax+b$。（換句話說，elliptic curve $y^2=x^3+ax+b$ 可以被 modular functions 參數化。）但是要找出這兩個modular functions仍是一個困難的事情。

在一系列的工作中，我們探討所謂的generalized Dedekind eta functions的性質，及其在Modular forms及modular functions理論中的應用。比如說，在論文 *transformation formulas for generalized Dedekind eta functions* 中，我們給出使得一個product of generalized Dedekind eta functions成為一個modular function的充分條件。利用此結果我們在同篇論文及 *on the Rademacher conjecture: congruence subgroups of genus zero of the modular group* 中決定了所有$SL(2, Z)$的genus zero congruence subgroups的Hauptmoduls (certain generators of the fields of modular functions)。我們並在論文 *defining equations of modular curves* 中給出一套通用的方法去計算defining equations of modular curves，其中構造 *modular functions* 的方法即使用前述論文的結果。在同篇論文中我們也利用我們所得到的defining equations of modular curves去實際給出elliptic curves of conductor 37的modular parameterization。我們的方法可進一步用在某些特別的elliptic curves。至於一般的elliptic curves要如何有系統地找到它們的modular parameterization仍是一個進行中的研究課題。

評審簡評：

有名的「谷山 - 志村猜想」(Taniyama-Shimura conjecture)是要證明定義於有理數的橢圓曲線都是模曲線，這個問題已經由 A. Wiles 解決，因此也解決了懸疑四百多年的「費瑪最後定理」。

但是如何具体的用模函數描述這些橢圓曲線，卻是Wiles沒有探討的，Wiles只是證明「谷山--志村猜想」(間接的存在性定理)。楊一帆先生在代表作(3)提出一個建造模曲線的方法，他的結果以後將被許多人使用在模曲線的研究。

代表作(1)與(2)是「計算數論」很有用的結果，代表作(1)的結果已在代表作(3)加以應用。