

中央研究院2006年年輕學者研究著作獎 研究成果簡介

數理組



姓名：余家富

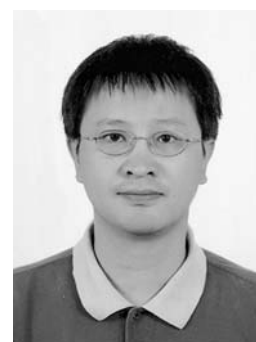
學歷：

美國賓州大學博士

現職及經歷：

中央研究院數學研究所副研究員(2004-)

美國哥倫比亞大學助理教授(1999-2004)



著作名稱：

1. C.-F. Yu, On reduction of Hilbert-Blumenthal varieties. *Annales de l'Institut Fourier (Grenoble)* 53 (2003), 2105-2154.

2. C.-F. Yu and J. Yu, Mass formula for supersingular Drinfeld modules. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.* 338 (2004) 905-908.

3. C.-F. Yu, On the mass formula of supersingular abelian varieties with real

multiplications. *J. Australian Math. Soc.* 78 (2005), 373-392.

中文簡介：

數學家對於模空間(modular varieties)和模型式(modular forms)的研究已經有 100 多年。最簡單的模空間是上半面除以一個 2 階的整矩陣群。一方面它是一個一維度的複流型(complex manifolds)且有高度的對稱性，一方面它也是所有橢圓曲線(elliptic curves)的集合。更精確的說，這個集合可以“連續”變動而形成一個非常特殊且對稱的複

流型。模型式是上半面上滿足特殊條件的函數，它們有非常豐富的算術性質模型式和算術方程式的解有深入的關連。因而從複幾何結構的研究，從表現理論角度的研究，代數幾何結構的研究，以及數論領域關於模空間的算術性質(arithmetic properties)的探討，均獲得豐富和深入的成果。儘管如此，這領域仍是非常活躍的一支，在 21 世紀仍是數學最重要的主流之一。近年來的研究著重在：

- (1) 整數結構(integral model)之幾何性質和模空間的 L- 函數。
- (2) P 進位模型式(p-adic families of p-adic modular forms)和 Iwasawa 理論。
- (3) Galois 表現。
- (4) 自守表現理論(automorphic representation theory)

其中(1)(3)(4)之間的關聯，就是 Langlands program 的核心問題。

我的研究領域主要在 PEL-type 志村簇(Shimura varieties of PEL-type)的幾何部分。這些是模空間，空間上每一個點代表一個 abelian variety 和一個特定的 PEL-type 結構(polarizations, endomorphisms and level structures)。關於幾何部分的探討主要是 reduction 模 p 的模空間維度(dimension)，有多少個 irreducible components，和探討 subvarieties 的幾何和算術性質。我們知道志村簇的上同調群(cohomologies)引出了 Galois 表現和自守表現間得對應，透過特徵 0 的上同調群可由特徵 p 的上同調群來逼近，幾何的結果可以進一步了解其局部對應更

精確的訊息，因而除了幾何上的研究，我們也尋找幾何在自守表現理論和 L- 函數的應用。

在第一篇文章我們找到一個研究 Hilbert 模空間任意劣化(bad reduction)的基本架構。Bad reduction 從 1993 年 Deligne 和 Pappas 開始探討，他們考慮模空間(total space)本身的幾何性質。關於模空間的 subvarieties 的探討，首先由 Goren 和 Oort 先在 good reduction 的情形討論(J. Alg. Geom. 2000)。他們探討所謂 Ekedahl-Oort stratification (即對 p -torsion 子群 $A[p]$ 做分類所得到的細分)和 Newton polygon Stratification (即對 $A[p^\infty]$ 在 isogeny classes 做分類所得到的細分)的關聯。在 Bad reduction 情況，我們引進兩種細分：Alpha Stratification 和 Lie Stratification，並探討在平滑部分上和 Newton Polygon Stratification 的關聯，因而推廣了 Goren 和 Oort 的工作。我們的工作啟發了 I. Vollaard (Journal of Inst. Math. Jussieu 2005)進一步研究，她證明用另一種方式定義(根據 Kottwitz)的模空間和 Deligne-Pappas 定義的模空間是一樣的。在我們的文章裡，我們證明 Grothendieck 猜想在 totally ramified 的情形是成立的，也就是說，Newton Polygon Stratification 滿足細分的基本性質。Grothendieck 猜想在一般的情形仍是 open problem。

在第二篇和第三篇文章我們探討超奇異的質量公式(mass formulas for supersingular points)。在第二篇文章我們建立 supersingular Drinfeld 模的質量公式，把它用

Picard group 和 Zeta 函數的特殊值(special values)來表達。我們的公式對於任何大域函數體(global function fields)和任意階(arbitrary rank)都成立。在 2 階情形或是有理函數域時，這個質量公式首先由 Gekeler 獲得。我們的方法和 Gekeler 的不同，兩種各有優點，Gekeler 的方法可以計算出超奇異點的質量，並比較 Special Zeta Values。我們把問題轉成體計算，直接把公式用 Special Zeta Values 表達，因而不僅推廣了 Gekeler 的公式，也簡化了他的工作。在另一篇文章我們考慮 Hilbert 模空間內 Superspecial 點的質量公式。Superspecial 點在模空間是很特殊的，它對應到 Supersingular 橢圓曲線的乘積而且形成有限子集，所以我們可以定義其質量和並期望它和 Zeta 函數的 Special Values 有直接相關。我們建立了類似的公式，並用它來計算在 Totally ramified 情況，超奇異軌跡(Supersingular locus)的 Components 個數。這個結果推廣了 Bachmat 和 Goren (Math Ann. 1999) 的工作。

評審簡評：

模空間的研究是代數幾何與代數數論的一個重要方向。余家富先生在代表作(1)討論 Hilbert-Blumenthal variety 在劣化約時的幾何性質。在此之前，Goren 與 Oort 已經討論優化約的情形(Goren and Oort, J. Alg. Geometry (2000) 111~154)。余家富的研究工作將可推動代數圈(algebraic cycles)與 L 函數的研究。

事實上，建立在以上研究工作的基礎上，余家富與賓州大學的翟敬立過去三年持續研究 Hilbert 模空間的 Hecke 軌道問題，由於他們的研究成果，翟敬立在今年的「國際數學家大會」(在馬德里舉行)獲邀做四十五分鐘的演講。代表作(2)與(3)是超奇異點的質量公式，也是相當有趣的結果。

余家富是台灣算術幾何領域的明日之星。今年夏天，法國的高等數學院舉辦的「法國與亞洲代數幾何與代數數論暑期營」，他也是籌備委員之一，足見法國數論學家對他的重視。